

ENONCE :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Éléments de correction

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Considérons la propriété : $\mathcal{P}_n$: « $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7 » .

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $3^{2 \times 0} - 2^0 = 1 - 1 = 0$ est un multiple de 7.
- Supposons que $\mathcal{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel p .

Alors $3^{2p} - 2^p$ est un multiple de 7.

Il existe donc un entier k tel que $3^{2p} - 2^p = 7k$ et donc $3^{2p} = 2^p + 7k$.

$$\begin{aligned}\text{Or } 3^{2(p+1)} - 2^{p+1} &= 3^{2p} \times 3^2 - 2^p \times 2 = 9(2^p + 7k) - 2 \times 2^p = 7 \times 2^p + 9 \times 7k \\ &= 7 \times (2^p + 9k) \quad \text{avec } 2^p + 9k \text{ entier.}\end{aligned}$$

Donc $3^{2(p+1)} - 2^{p+1}$ est un multiple de 7 ; $\mathcal{P}_{p+1}$ est donc vraie .

La propriété est héréditaire .

CONCLUSION : Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}_n$ est vraie .